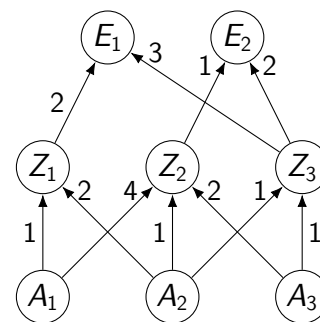


Lineare Algebra, Aufgabe 2 (mit WTR)

Ein Industriebetrieb fertigt gemäß dem abgebildeten Verflechtungsgraphen aus den Ausgangsprodukten A_1 , A_2 und A_3 zunächst die Zwischenprodukte Z_1 , Z_2 sowie Z_3 und daraus anschließend die beiden Endprodukte E_1 sowie E_2 .



Stückzahlen der Ausgangsprodukte, der Zwischenprodukte und der Endprodukte sollen jeweils durch einen Spaltenvektor dargestellt werden. Die Verflechtungsmatrix AZ gibt zu jedem Zwischenprodukt die Stückzahlen der für ein Stück erforderlichen Ausgangsprodukte an, die Verflechtungsmatrix ZE entsprechend zu jedem Endprodukt die Stückzahlen der erforderlichen Zwischenprodukte.

- (2) (a) Geben Sie AZ und ZE an.
- Ziel: $\begin{pmatrix} \text{Matrix} \\ AZ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \text{Vektor der} \\ \text{Zwischenprodukte} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Vektor der nötigen} \\ \text{Ausgangsprodukte} \end{pmatrix}$ (vgl. Teilaufg. b)
- $\begin{pmatrix} \text{Matrix} \\ ZE \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \text{Vektor der} \\ \text{Endprodukte} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Vektor der nötigen} \\ \text{Zwischenprodukte} \end{pmatrix}$

1. Spalte von $AZ = AZ \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\hat{=} 1Z_1 + 0Z_2 + 0Z_3$
braucht $1A_1 + 2A_2 + 0A_3$

nach: $Z_1 \quad Z_2 \quad Z_3$

von:

A_1	$AZ =$	$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	und
A_2			
A_3			

2. Spalte von $ZE = ZE \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\hat{=} 0E_1 + 1E_2$
braucht $0Z_1 + 1Z_2 + 2Z_3$

nach: $E_1 \quad E_2$

von:

Z_1	$ZE =$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$
Z_2		
Z_3		

- (4) (b) Dem Industriebetrieb liegt eine Bestellung von $500 E_1$ und $400 E_2$ vor. Berechnen Sie die Stückzahlen der dafür erforderlichen Ausgangsprodukte.
- $\hat{=} \begin{pmatrix} 500 \\ 400 \end{pmatrix}$

Berechnung der erforderlichen Zwischenprodukte:

$$\begin{aligned}
 ZE \cdot \begin{pmatrix} 500 \\ 400 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 500 \\ 400 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 2 \cdot 500 + 0 \cdot 400 \\ 0 \cdot 500 + 1 \cdot 400 \\ 3 \cdot 500 + 2 \cdot 400 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1000 \\ 400 \\ 2300 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Berechnung der erforderlichen Ausgangsprodukte:

$$\begin{aligned}
 AZ \cdot \begin{pmatrix} 1000 \\ 400 \\ 2300 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1000 \\ 400 \\ 2300 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1000 + 4 \cdot 400 + 0 \cdot 2300 \\ 2 \cdot 1000 + 1 \cdot 400 + 1 \cdot 2300 \\ 0 \cdot 1000 + 2 \cdot 400 + 1 \cdot 2300 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 2600 \\ 4700 \\ 3100 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

⇒ Es werden 2600 A_1 , 4700 A_2 und 3100 A_3 gebraucht.

- (4) (c) Den folgenden Tabellen können für die Ausgangsprodukte und die Zwischenprodukte die dem Betrieb entstehenden Anschaffungskosten bzw. Fertigungskosten pro Stück entnommen werden:

	A_1	A_2	A_3
Anschaffungskosten	2 €	1 €	3 €

	Z_1	Z_2	Z_3
Fertigungskosten	3,50 €	5 €	2 €

Die Kosten für die Fertigung eines Endprodukts E_1 aus den Zwischenprodukten betragen sieben Euro. **Ermitteln Sie** die Kosten, die dem Betrieb für die Herstellung eines Endprodukts E_1 für Anschaffung und Fertigung insgesamt entstehen.

erforderliche Zwischenprodukte für 1 E_1 : $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \text{Fertigungskosten: } &\underbrace{7 \text{ €}}_{\text{für Endprodukt}} + \underbrace{2 \cdot 3,5 \text{ €} + 0 \cdot 5 \text{ €} + 3 \cdot 2 \text{ €}}_{\text{für Zwischenprodukte}} = 20 \text{ €}
 \end{aligned}$$

erforderliche Ausgangsprodukte:

$$AZ \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 4 \cdot 0 + 0 \cdot 3 \\ 2 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 3 \\ 0 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Anschaffungskosten: } 2 \cdot 2 \text{ €} + 7 \cdot 1 \text{ €} + 3 \cdot 3 \text{ €} = 20 \text{ €}$$

$$\Rightarrow \text{Gesamtkosten} = \text{Anschaffungskosten} + \text{Fertigungskosten} = 20 \text{ €} + 20 \text{ €} = 40 \text{ €}.$$

- (2) (d) Der Betrieb hat 46 Z_1 , 64 Z_2 und 81 Z_3 auf Lager. **Bestimmen Sie**, wie viele Endprodukte E_1 sich daraus höchstens fertigen lassen.

erforderliche Zwischenprodukte für 1 E_1 : $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

\Rightarrow mit 46 Z_1 können höchstens $46 : 2 = 23$ E_1 produziert werden, mit 64 Z_2 beliebig viele und mit 81 Z_3 höchstens $81 : 3 = 27$ E_1 . Insgesamt können also höchstens 23 E_1 hergestellt werden.

- (2) (e) **Beschreiben Sie** für jede der Matrizen AZ und ZE , wie die Anzahl der Zeilen und die Anzahl der Spalten verändert werden müssen, wenn aus den Ausgangsprodukten ein weiteres Zwischenprodukt Z_4 gefertigt wird, das für die Herstellung der Endprodukte verwendet wird.

AZ müsste eine zusätzliche Spalte bekommen, ZE eine zusätzliche Zeile.

$$\begin{array}{l}
 \text{von:} \\
 A_1 \\
 A_2 \\
 A_3
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \text{nach: } Z_1 \ Z_2 \ Z_3 \ Z_4 \\
 AZ = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & ? \\ 2 & 1 & 1 & ? \\ 0 & 2 & 1 & ? \end{pmatrix}
 \end{array}
 \text{ und }
 \begin{array}{l}
 \text{von:} \\
 Z_1 \\
 Z_2 \\
 Z_3 \\
 Z_4
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \text{nach: } E_1 \ E_2 \\
 ZE = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \\ ? & ? \end{pmatrix}
 \end{array}$$