22 Multiplikation und Division von Dezimalzahlen

Darum geht's

Die schriftlichen Rechenverfahren zur Multiplikation und Division von ganzen Zahlen (siehe S. 20) können fast unverändert auch für Dezimalzahlen verwendet werden. Man muss nur wissen, wo das Komma gesetzt wird.

Multiplikation

Um Dezimalzahlen zu multiplizieren geht man in drei Schritten vor:

1) Nachkommastellen der Faktoren abzählen, um deren Gesamtzahl zu ermitteln
2) Kommata weglassen und die so entstandenen ganzen Zahlen wie gewohnt multiplizieren.
3) vom Ergebnis so viele Stellen von hinten durch ein Komma abtrennen, wie in Schritt 1 gezählt

Beispiel:

112,5 · 37,33 hat insgesamt 3 Nachkommastellen (1 vom ersten Faktor und 2 vom zweiten Faktor); die Ziffern ergeben sich durch schriftliche Multiplikation (siehe rechts)
$\Longrightarrow$ 112,5 · 37,33 = 4199,625 (3 Nachkommastellen hinten abgetrennt).

```
1 1 2 5 · 3 7 3 3
      3 3 7 5 0 0 0
+       7 8 7 5 0 0
+         3 3 7 5 0
+           3 3 7 5
      1 1 1 1 1
      4 1 9 9 6 2 5
```

Division

Die Division von Dezimalzahlen erfolgt in vier Schritten:

1) Nachkommastellen von Dividend und Divisor abzählen, um größere der beiden Anzahlen zu ermitteln
2) Dividend und Divisor jeweils so oft mit 10 multiplizieren, wie in Schritt 1 ermittelt
3) die so entstandenen ganzen Zahlen wie gewohnt dividieren (siehe S. 20), außer dass der Rest (sofern vorhanden) noch weiter verarbeitet wird (siehe Schritt 4)
4) falls ein Rest bei der ganzzahligen Division übrig bleibt, hinter den bisherigen Lösungsziffern ein Komma setzen, hinter dem aktuellen Rest eine 0 anfügen und weiter dividieren, bis kein Rest mehr übrig bleibt.

Beispiel:

Bei 3,85 : 0,14 müssen Dividend und Divisor 2-mal mit 10 multipliziert werden (da sie maximal 2 Nachkommastellen haben), d. h. 3,85 : 0,14 = 385 : 14. Die Lösung ergibt sich nun durch schriftliche Division (siehe rechts)

```
  3 8 5 : 1 4 = 27,5
− 2 8
  1 0 5
−   9 8
      7 0
    − 7 0
        0
```

Typische Aufgaben in der Mittelstufe

- Ein Auto verbraucht 8,3 ℓ auf 100 km. Wie viel Treibstoff werden für 550 km verbraucht? Lösung: 45,65 ℓ
- Eine CD kostet 14,40 €. Wie viele Kugel Eis zu je 1,20 € könnte man dafür kaufen? Lösung: 12 Kugeln

022

Division von Dezimalzahlen

Was man sich merken sollte

Bei der Multiplikation von Dezimalzahlen gehst du wie folgt vor:

1) Nachkommastellen beider Ausgangszahlen zählen
2) Kommata und Vorzeichen weglassen und wie mit natürlichen Zahlen schriftlich multiplizieren
3) in der Lösung so viele Nachkommastellen abtrennen, wie die beiden Ausgangszahlen zusammen; ggf. Vorzeichen ergänzen (nur dann negativ, wenn die Ausgangszahlen unterschiedliche Vorzeichen hatten)

Für die Division werden Dividend und Divisor erst ganzzahlig gemacht, dann ihre Beträge dividiert (bei Rest mit Komma weiterrechnen). Bei unterschiedlichen Vorzeichen der Ausgangszahlen ist die Lösung negativ.

40 Binomische Formeln

Darum geht's

Die drei binomischen Formeln dienen zum einen der Vereinfachung von Termen (Rechenausdrücken) und zum anderen der Lösung von quadratischen Gleichungen mittels quadratischer Ergänzung. In ihrer allgemeinsten Form lauten sie wie folgt:

040

1. binomische Formel

1. binomische Formel:
Für alle Zahlen a und b gilt $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2. binomische Formel:
Für alle Zahlen a und b gilt $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

3. binomische Formel:
Für alle Zahlen a und b gilt $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Pascal'sches Dreieck

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1

Jede Zahl ergibt sich als Summe der zwei darüber liegenden Zahlen. Die 3. Zeile enthält die Koeffizienten für die 2. Potenz von $(a + b)$, die 4. Zeile die Koeffizienten für die 3. Potenz usw.:
$(a + b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$;
$(a + b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$

Anwendung zur Vereinfachung von Termen

Möchte man Bruchterme kürzen (vereinfachen) oder auf Nullstellen untersuchen, so muss man den Zähler und evtl. den Nenner in ein Produkt umwandeln, dessen Faktoren möglichst niedrige Potenzen der Variablen enthalten.

Beispiel 1: Bruchterm kürzen

$\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1} = \frac{(x + 1)^2}{(x + 1)(x - 1)} = \frac{x + 1}{x - 1}$ (Zähler mit der 1. binomischen Formel faktorisiert, Nenner mit der 3.)

Beispiel 2: Definitionsbereich eines Bruchterms

$\frac{x^2 - 4}{4x^2 + 12x + 9} = \frac{(x + 2)(x - 2)}{(2x + 3)^2}$ ist bei x definiert $\iff 2x + 3 \neq 0 \iff 2x \neq -3 \iff x \neq -1{,}5$

(Zähler mit der 3. binomischen Formel faktorisiert, Nenner mit der 1.), d. h. der Definitionsbereich ist $\mathbb{R} \setminus \{-1{,}5\}$.

Anwendung zur quadratischen Ergänzung

Möchte man quadratische Gleichungen ohne Anwendung der quadratischen Lösungsformel lösen oder auch den Term einer quadratischen Funktion in Scheitelpunktsform bringen (z. B. um den Graphen zu skizzieren), so können die binomischen Formeln weiterhelfen.

Tipp

Auch die Herleitung der quadratischen Lösungsformel läuft über eine quadratische Ergänzung.

Beispiel 1: quadratische Ergänzung (ab 9. Klasse)

gesucht: Nullstellen des Terms $4x^2 - 28x + 45$, also Lösungen der Gleichung $4x^2 - 28x + 45 = 0$

Methode: Zahlen a und b finden, so dass $4x^2 - 28x = a^2 - 2ab$ gilt („quadratische Ergänzung"). Für $a^2 = 4x^2$ bietet sich $a = 2x$ an. Aus $2ab = 28x$ folgt dann $b = 28x : 2a = 28x : 4x = 7$. Damit können wir die 2. binomische Formel anwenden: Mit $a = 2x$ und $b = 7$ ergibt sich

$4x^2 - 28x + 45 = 4x^2 - 28x + 49 - 4 = a^2 - 2ab + b^2 - 4 = (a - b)^2 - 4 = (2x - 7)^2 - 4$ und damit

$4x^2 - 28x + 45 = 0 \iff (2x - 7)^2 - 4 = 0 \iff (2x - 7)^2 = 4 \iff |2x - 7| = 2$

$\iff 2x - 7 = 2$ oder $2x - 7 = -2 \iff 2x = 9$ oder $2x = 5 \iff x = 4{,}5$ oder $x = 2{,}5$

Beispiel 2: Scheitelpunktsform (ab 9. Klasse)

Durch quadratische Ergänzung (s. o.) erhält man $f(x) = x^2 - 6x + 7 = (x - 3)^2 - 2$.

Verschiebung nach rechts   Verschiebung nach unten

55 Achsensymmetrie

Darum geht's

055

Achsen-
symmetrie

Symmetrie ist eine Form von geometrischer Regelmäßigkeit und begegnet uns auf Schritt und Tritt in der Natur, in der Technik und in der Kunst. Die wichtigsten ebenen Symmetrien sind die Achsensymmetrie (auch Spiegelsymmetrie genannt) und die Punktsymmetrie. Bei der Achsensymmetrie entsteht eine Hälfte der Figur durch Spiegelung der anderen Hälfte an einer Symmetrieachse, z. B. so:

Jeder markante Punkt (z. B. Eckpunt, Schnittpunkt von Linien, Mittelpunkt eines Kreisbogens) einer Hälfte einer achsensymmetrischen Figur hat eine Entsprechung auf der anderen Seite der Symmetrieachse, nämlich dessen sogenannten Spiegelpunkt mit folgenden Eigenschaften:

1) Punkt und Spiegelpunkt sind gleich weit von der Symmetrieachse entfernt.
2) Die Verbindungsstrecke von Punkt und Spiegelpunkt steht senkrecht auf der Symmetrieachse

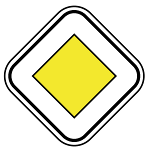
Diese zwei Eigenschaften bedeuten: Die Symmetrieachse ist die Mittelsenkrechte jeder Verbindungsstrecke eines Punktes mit dessen Spiegelpunkt.

Tipp

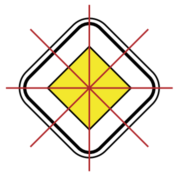
Beachte, dass Symmetrieachsen nicht horizontal oder vertikal verlaufen müssen — sie können beliebig geneigt sein.

Typische Aufgaben in der Mittelstufe

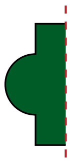
- Finde alle Symmetrieachsen der nebenstehenden Figur und zeichne sie ein.



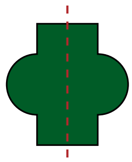
Lösung:



- Ergänze die nebenstehende Figur so, dass das Ergebnis achsensymmetrisch zur rot gestrichelten Linie ist:



Lösung:



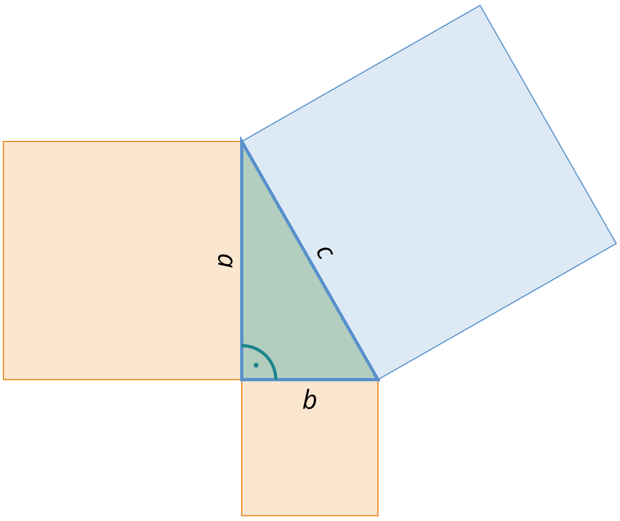
Was man sich merken sollte

Achsensymmetrie: zwei Seiten einer Figur kommen bei Faltung entlang einer Achse zur Deckung
Symmetrieachse: Gerade, die eine Figur in zwei Hälften zerlegt, von denen eine die Spiegelung der anderen an dieser Geraden ist
Spiegelpunkt: neuer Punkt, der aus einem vorgegebenen Punkt durch Spiegelung (an einer Achse oder einem Symmetriezentrum) entsteht

75 Der Satz des Pythagoras

Darum geht's

Der Satz des Pythagoras gibt den Zusammenhang zwischen der längsten und den beiden kürzeren Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks an. Im folgenden Bild sind a und b die beiden kürzeren Seiten (die sogenannten Katheten) und c die längste Seite (genannt „Hypotenuse"):



Tipp

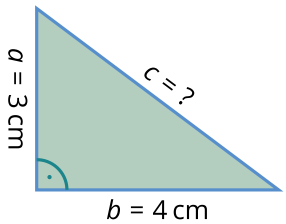
Wozu eignet sich der Satz des Pythagoras?

- *Seitenlängen im rechtwinkligen Dreieck berechnen*
- *Dreieck auf Rechtwinkligkeit prüfen*

Der Satz von Pythagoras sagt aus, dass die beiden orangen Quadrate über den Seiten a und b zusammen die gleiche Fläche haben, wie das blaue Quadrat über der Seite c, d. h. $a^2 + b^2 = c^2$ (sog. *Pythagoras-Formel*).

Typische Aufgaben in der Mittelstufe

- Berechne die fehlende Seitenlänge in folgendem Dreieck:



- Die kürzeren Seiten eines Dreiecks sind 30 m und 40 m lang. Wie lang muss die längste Seite sein, damit die kürzeren Seiten einen rechten Winkel einschließen? Lösung: 50 m
- Eine 3 m lange Leiter lehnt an einer senkrechten Wand. Wie hoch kann man damit steigen, wenn das untere Ende mindestens 1 m Abstand zur Wand haben soll? Lösung: ca. 2,83 m

Tipp

Die Pythagoras-Formel muss ggf. nach a^2 oder b^2 aufgelöst werden. Anschließend wird auf beiden Seiten die Wurzel gezogen.

075a

Kathetenlänge eines rechtwinkligen Dreiecks berechnen

Was man sich merken sollte

Der Satz des Pythagoras:

Sind a und b die kürzeren Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks, so gilt für die längste Seite c:

$c^2 = a^2 + b^2$

Warum das so ist, erfährst du in unserem Herleitungsvideo.

Umkehrung des Satzes von Pythagoras:

Wenn die drei Seitenlängen a, b und c irgendeines Dreiecks die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ erfüllen, dann schließen die Seiten a und b einen rechten Winkel ein.

075b

Pythagoras (Herleitung)

85 Prismen

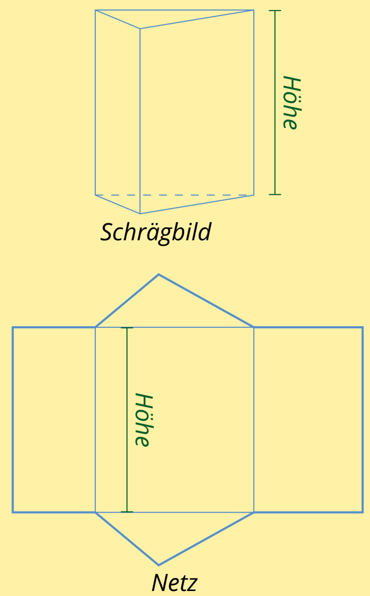
Darum geht's

085

Prismen

Ein Prisma der Höhe *h* ist der Raum, der von einem Vieleck (z. B. Dreieck, Viereck, etc.) durchquert wird, wenn es in der Höhe *h* über dem Boden waagerecht ausgerichtet wird und von dort senkrecht nach unten zu Boden fällt. Dieses Vieleck bildet in seiner Anfangsposition die Deckfläche, in seiner Endposition die Grundfläche des Prismas. Die bekanntesten Prismen sind die Quader, bei denen das o. g. Vieleck ein Rechteck ist. Ein Prisma hat neben Deckfläche und Bodenfläche noch eine Mantelfläche, die aus mehreren rechteckigen Teilen besteht (so viele Teile wie das Vieleck Kanten hat). Da alle diese Teile dieselbe Höhe haben, bilden sie beim Auseinanderfalten der Mantelfläche ein großes Rechteck. Im Alltag kommen neben den vielen Quadern auch Dreiecksprismen vor, z. B. bei der Toblerone-Verpackung.

Darstellungen



Oberfläche

Die Oberfläche eines Prismas besteht aus zwei Kopien der Grundfläche (nämlich Bodenfläche und Deckfläche) sowie einem großen zusammengefalteten Rechteck, dessen Breite der Höhe des Prismas entspricht und dessen Länge dem Umfang der Grundfläche (also der Summe ihrer Seitenlängen) entspricht. Die Formel lautet somit

$O_{\text{Prisma}} = 2 \cdot A_{\text{Grundfläche}} + U_{\text{Grundfläche}} \cdot \text{Höhe}$

Volumen

Der Rauminhalt eines Prismas ist proportional zur Höhe und zum Flächeninhalt der Grundfläche. Die Formel lautet

$V_{\text{Prisma}} = A_{\text{Grundfläche}} \cdot \text{Höhe}$

Typische Aufgaben in der Mittelstufe

- Ein 6 cm hohes Prisma hat als Grundfläche ein rechtwinkliges Dreieck mit den Kathetenlängen 3 cm und 4 cm. Berechne die Oberfläche des Prismas. Lösung: 84 cm^2
- Bestimme das Volumen des oben beschriebenen Prismas. Lösung: 36 cm^3

Was man sich merken sollte

Hat ein Prisma die Grundfläche *G* (mit Umfang U_G) und die Höhe *h*, so gilt für seine Oberfläche

$O_{\text{Prisma}} = 2G + U_G \cdot h$

und für sein Volumen

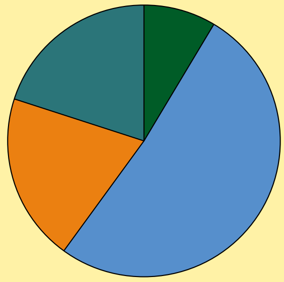
$V_{\text{Prisma}} = G \cdot h$

96 Kreisdiagramme

Darum geht's

Kreisdiagramme dienen dem anschaulichen Vergleich von Größen. Im Gegensatz zu einer Tabelle mit den einzelnen Zahlenwerten sieht man an einem Kreisdiagramm sofort, wie sich die Größen zueinander verhalten, nämlich genau so wie ihre Flächeninhalte. Der größte Sektor entspricht also dem größten Zahlenwert usw. Außerdem erkennt man im Kreisdiagramm auch ohne Weiteres das Verhältnis jeder Einzelgröße zur Gesamtgröße ohne rechnen zu müssen. Allerdings kommen diese Vorteile nur zur Geltung, wenn nicht zu viele Einzelgrößen verglichen werden.

Beispiel: Klassensprecherwahl



Kandidat(in)	*Jens*	*Timo*	*Pia*	*Jana*
Stimmen	*3*	*18*	*7*	*7*

In der Tabelle sieht man nicht sofort, dass ein Kandidat mehr als die Hälfte aller Stimmen (also die absolute Mehrheit) hat, im Kreisdiagramm schon.

Kreisdiagramme erstellen: so funktioniert's

Gehe in vier Schritten vor:

Schritt 1: Einzelgrößen summieren, um die Gesamtgröße zu ermitteln

Schritt 2: jede Einzelgröße durch die Gesamtgröße teilen und mit 360° multiplizieren, um den zugehörigen Mittelpunktswinkel zu bekommen

Schritt 3: Kreis zeichnen und mit dem Geodreieck die berechneten Mittelpunktswinkel ausmessen und ihre Schenkel einzeichnen

Schritt 4: Sektoren beschriften und / oder färben und eine Legende zusammenstellen

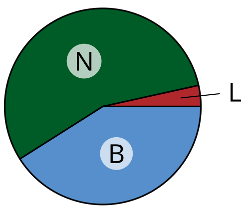
Typische Aufgaben in der Mittelstufe

096

Kreis-diagramme erstellen

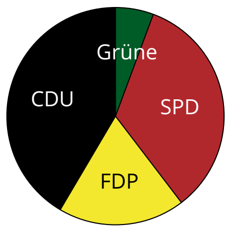
- Stelle die Flächenverteilung der Benelux-Staaten in einem Kreisdiagramm dar.

Lösung:



Legende:
N = Niederlande
L = Luxemburg
B = Belgien

- Lies aus dem nebenstehenden Kreisdiagramm ab, welche Partei in der Umfrage am besten abschnitt und versuche mit deinem Geodreieck den Anteil der Stimmen möglichst genau zu bestimmen.
  Lösung: Die CDU hat mit ca. 41,5 % der Stimmen am besten abgeschnitten.



Was man sich merken sollte

Teilt man eine Kreisscheibe durch gerade Linien vom Mittelpunkt zum Rand in Stücke, so heißt jedes Stück „Kreissektor". Beschreibt ein Sektor im Kreisdiagramm eine Größe G_i bei einer Gesamtsumme G_0 aller Größen, so gilt für den zugehörigen Mittelpunktswinkel α_i:

$\frac{\alpha_i}{360°} = \frac{G_i}{G_0}$ oder anders ausgedrückt $\alpha_i = \frac{G_i}{G_0} \cdot 360°$.